TD 14 : Révisions

I. Diviser pour régner

Exercice 1 : *Méthode de Strassen*. Dans cet exercice, on considère deux matrices carrées A et B de même dimension $n \times n$. On s'intéresse au calcul du produit C de ces deux matrices.

1. Quelle est la complexité de l'algorithme usuel de la multiplication de deux matrices de taille $n \times n$? Quelle est la complexité de la somme de deux matrices de même taille ?
2. On suppose que A, B, (et donc C) sont de dimension $2p \times 2p$. On les découpe chacune en 4 blocs de taille $p \times p$: $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix}$. Exprimer le produit C des matrices A et B en fonction des 8 blocs.
3. En déduire un algorithme de type diviser pour régner. On explicitera les 3 parties diviser, régner et reconstruire.
4. Déterminer la complexité de cet algorithme. On se limitera au cas où les tailles des matrices sont des puissance de 2. Que peut-on en déduire ?
5. L'algorithme de Strassen est un algorithme dont la complexité est meilleure que la version naïve ci-dessus. On va montrer qu'on peut calculer les blocs de la matrice avec seulement 7 multiplications de blocs au lieu de 8.

   On considère les 7 matrices ci-dessous :
   - $M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2}) \times (B_{1,1} + B_{2,2})$
   - $M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2}) \times B_{1,1}$
   - $M_3 = A_{1,1} \times (B_{1,2} - B_{2,2})$
   - $M_4 = A_{2,2} \times (B_{2,1} - B_{1,1})$
   - $M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2}) \times B_{2,2}$
   - $M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1}) \times (B_{1,1} + B_{1,2})$
   - $M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2}) \times (B_{2,1} + B_{2,2})$

   1. Vérifier que $C_{1,1} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$.
   2. (Bonus) Exprimer les matrices $C_{1,2}$, $C_{2,1}$ et $C_{2,2}$ sous la forme de somme et différence des matrices M_i.
   3. En déduire un algorithme diviser pour régner, et exprimer sa complexité.

II. Logique

Dans une association de jeunes détectives, les membres s'entraînent à résoudre des problèmes logiques. Ceux-ci respectent les règles suivantes : « Lors d'une conversation, un même membre aura un comportement constant : il dira toujours la vérité, ou ne dira jamais la vérité. » et « Une conversation ne doit pas être absurde. »

Question I.1 *Soient n membres intervenant dans une même conversation. Chaque membre est représenté par une variable propositionnelle M_i avec $i \in [1 \cdots n]$ qui représente le fait que ce membre dit, ou ne dit pas, la vérité. Chaque membre fait une seule déclaration représentée par la variable propositionnelle D_i. Représenter le respect des règles dans cette conversation sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables M_i et D_i avec $i \in [1 \cdots n]$.*

Vous assistez à deux conversations sur la véracité des déclarations de deux groupes de trois membres de cette association.
Nous nommerons A, B et C les participants de la première conversation.

A : « Les seuls qui disent la vérité ici sont C et moi. »

B : « C ne dit pas la vérité. »

C : « Soit B dit la vérité. Soit A ne dit pas la vérité. »

Nous noterons A, B et C les variables propositionnelles associées au fait que A, B et C disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_A, D_B et D_C les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de A, B et C dans la conversation.

Question I.2 *Représenter les déclarations de la première conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_A, D_B et D_C dépendant des variables A, B et C.*

Question I.3 *En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer si A, B et C disent, ou ne disent pas, la vérité.*

Nous nommerons D, E et F les participants de la seconde conversation.

D : « Personne ne doit croire F. »

E : « D et F disent toujours la vérité. »

F : « E a dit la vérité. »

Nous noterons D, E et F les variables propositionnelles associées au fait que D, E et F disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_D, D_E et D_F les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de D, E et F dans la seconde conversation.

Question I.4 *Représenter les déclarations de la seconde conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_D, D_E et D_F dépendant des variables D, E et F.*

Question I.5 *En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer si D, E et F disent, ou ne disent pas, la vérité.*